

# Fascinationen ved knuder

## Matematik

Den gordiske knude:

»At lave en ikke-knude fra en forelagt knude med besværing kræver et sværd til beskæring.«

Demonstreret af Alexander den Store.

Det er en fascinerende egenskab ved det 3-dimensionale rum, hvori vi lever, at det tillader knuder. Tag et stykke snor, slå en knude på snoren, bind de to ender sammen, og der opstår en matematisk knude. Mere præcist er en matematisk *knude* en lukket kurve i rummet uden selv-gennemskæringer; for forståelsens skyld må den gerne anskues som et snorestykke med sammenbundne ender. Hvis den lukkede kurve kan deformeres over i en cirkel uden at skære den over i processen, kaldes den en *triviel knude*, eller en *ikke-knude*.

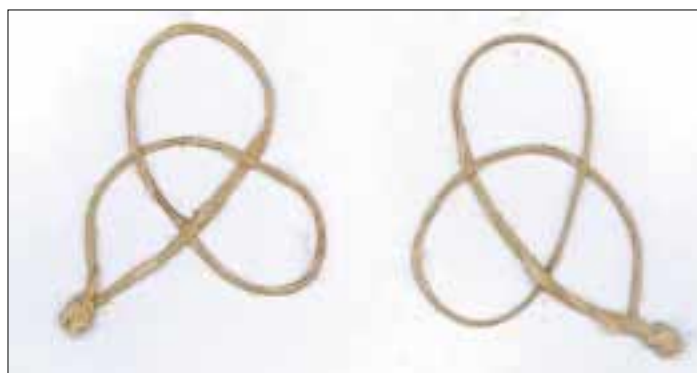
En højrehåndet person, som slår en sædvanlig knude på et stykke snor før enderne bindes sammen, frembringer en såkaldt højrehåndet kløverbladsknude, mens en venstrehåndet person frembringer en venstrehåndet kløverbladsknude. Begge de to kløverbladsknuder er ikke trivielle, og de kan ikke deformeres over i hinanden; intuitive kendsgerninger som er overraskende vanskelige at bevise matematisk. Da de to kløverbladsknuder samtidigt kan arrangeres som hinandens spejlbilleder, sådan at den ene fremkommer fra den anden ved



Figur 3. To snore med tre halve snoinger. Når enderne bindes sammen fremkommer en kløverbladsknude.



Figur 1. En knude, der kan deformeres over i en cirkel uden at skære den over i processen, kaldes en triviel knude, eller en ikke-knude. Figuren viser to eksempler.



Figur 2. Til højre ses den højrehåndede kløverbladsknude og til venstre den venstrehåndede. Kløverbladsknuderne er anbragt, så man kan se, at de er hinandens spejlbilleder. Da de ikke kan deformeres over i hinanden, siger man, at en kløverbladsknude er kiral.

spejling i et plan, siger en matematiker, med et ord arvet fra krystallografien, at en kløverbladsknude udviser håndethed, eller at den er *kiral*.

Man kan frembringe en kløverbladsknude ved at sammenbinde de to ender i en fletning bestående af et par af snore sammensnoet med tre halve snoinger.

### Fletninger

Fra et system af tre snore kan man frembringe en sædvanlig hårfletning ved at gentage en procedure et antal gange, hvori man først tager den første snor over den anden og så den tredje

snor over den anden. Hvis man gentager denne procedure tre gange og dernæst sammenbinder enderne på den resulterende fletning, får man et system af tre sammenhængende ringe med den egenskab, at fjerner man en vilkårlig af de tre ringe fra systemet, falder det fuldstændigt fra hinanden. Dette system af tre sammenhængende ringe kaldes en *Borromean lænke*. Det er netop denne type af lænke, man møder i en såkaldt tre-i-en ring, som udsmykker mange fingre.

Helt generelt kan en vilkårlig knude eller lænke opnås ved at sammenbinde enderne på en

passende fletning.

Det 3-dimensionale rum har en skjult symmetri, som giver anledning til begrebet spin for elementarpartikler i fysik. Fænomenet spin kan illustreres ved en overraskende egenskab ved fletninger, nemlig at man kan afsno en dobbelt snoning af snore uden tilbagesnoring. Denne kendsgerning er knyttet til eksistensen af ikke-trivielle knuder i gruppen af rotationer i rummet.

Der er også andre fysiske anvendelser af teorien for fletninger, eksempelvis i forbindelse med topologiske kvantetal, og i fluid dynamik ved studiet af vortex ringe og af kaotisk dynamik.



Figur 6. Armbånd fra Georg Jensen.

### Knuder og kunst

Knuder kan findes til overflod i arabisk ornamentik og som dekorationer i keltiske kulturer og vikinge kulturer. Der findes faktisk meget matematik i kunst og design.



Figur 4. Sammenbindes enderne i en hårfletning med tre basis fletninger, fremkommer en Borromean lenke.



Figur 7. Skulpturen „Immortality“ af den engelske kunstner John Robinson. Gengivet med tilladelse af Edition Limitée.

Randen på et Möbius bånd - et rektangulært bånd hvor man har limet et par af modstående sider sammen efter først at have givet båndet en halv snoning - er en ikke-knude. Möbius båndet bruges i et vidunderligt armbånd lavet af firmaet grundlagt af den danske sølvsmed Georg Jensen.

Kunstneren John Robinson har lavet en spændende skulptur af et Möbius bånd udformet som en kløverbladsknude. Han kalder sin skulptur *Immortality*. Man kan gennemløbe båndet igen og igen i en periodisk bevægelse, men det er nødvendigt at gennemløbe det to gange for at komme tilbage

til udgangspositionen.

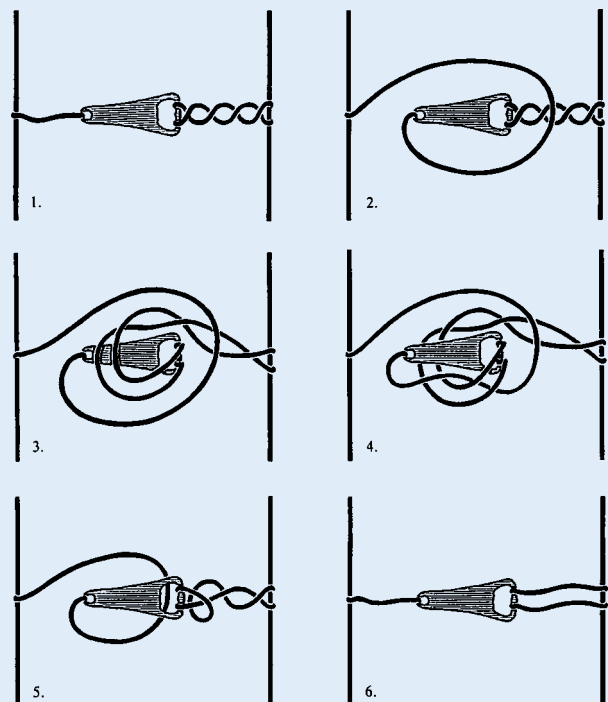
Hvis man udformer en knude som et rør uden vinduer

og går rundt inden i røret, er det vanskeligt at afgøre, om røret har en knude, eller om det er en ikke-knude. At være en knude, eller en ikke-knude, er en egenskab ved det omgivende rum til knuden. Man kan derfor pakke en stor rummængde sammen i et rør med knuder uden at forandre den periodiske karakter af det indre, som kan opleves i en ikke-knude, mens man på samme tid kan sørge for, at røret er attraktivt set udefra.

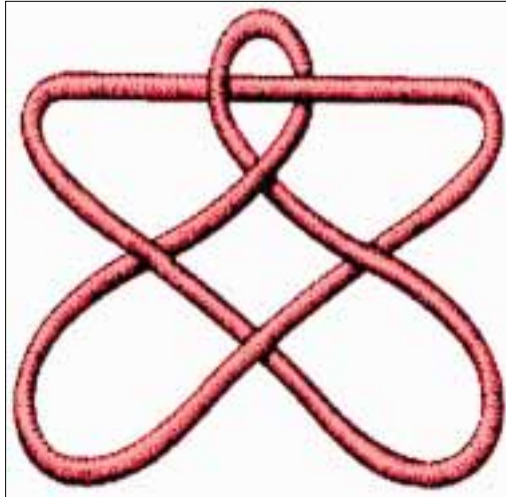
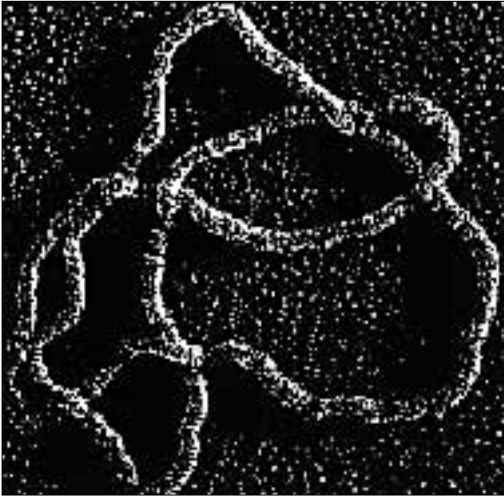
### Et vigtigt forskningsområde

Fascinationen ved knuder og lænker er gammel som menneskeheden selv, men studiet af

## Diracs strengproblem



Figur 5. I de 6 små figurer vises det, hvordan man uden at dreje på flaskeåbneren kan fjerne dobbeltsnoringen på systemet af elastiske (eller løst hængende) tråde i 1. ved at føre de elastiske tråde over og rundt om flaskeåbneren. Demonstrationen belyser begrebet 'half-spin' for elementarpartikler.



Figur 8. Knudeteori har for nylig fundet anvendelser i studiet af DNA-molekyler. Omkring 1986 påviste biokemikerne Wasserman, Dungan og Cozzarelli, at bestemte enzymer fik visse DNA-molekyler til at danne knuder i form af den såkaldte stevedor knude. Elektronmikroskopi billedet (tv) er fremstillet i laboratoriet hos Nicholas Cozzarelli, Professor i Biokemi og Molekyler Biologi ved University of Berkeley. Til sammenligning vises stevedor knude (th).

dem som matematiske objekter begyndte først for alvor i et arbejde af den tyske matematiker Johann Listing 1847. Efter at den New Zealandske matematiker Vaughn Jones omkring 1985 opdagede en ny polynomiums invariant til at skelne mellem knudetyper, er studiet

af knuder og lænker blevet et vigtigt matematisk forskningsområde med et antal potentielle anvendelser i andre videnskaber, ikke mindst i biologi ved studiet af proteiner og vira. Eksempelvis angriber vira lange DNA-molekyler i cellekernerne ved at binde forskellige knuder

på dem. Den matematiske teori for knuder tillader os at identificere signaturen af de forskellige typer af virus og kan således hjælpe ved bekæmpelsen af dem.

Man er nået langt, siden Alexander den Store brugte sværd til at løse den gordiske knude. ☺



#### Om forfatteren

Vagn Lundsgaard Hansen er professor ved

Institut for Matematik  
DTU, Bygning 303  
2800 Lyngby

Tlf.: 4525 3039

Fax: 4588 1399

E-mail: V.L.Hansen@mat.dtu.dk

#### Yderligere læsning

V.L. Hansen: *Braids and Coverings - Selected topics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).

J. C. Turner and P. van de Griend (Editors): *History and Science of Knots*. World Scientific Ltd., Singapore (1996).

#### Hjemmesider:

"Mathematics in Knots",  
University of Wales, Bangor  
<http://www.bangor.ac.uk/math/CPM/exhibit/welcome.htm>

En side med mange links er:  
<http://www.forum.swarthmore.edu/>